J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
9 (1974) 55-60

CARACTÉRISATION DES VARIÉTÉS À COURBURES SECTIONNELLES HOLOMORPHES GÉNÉRALISÉES CONSTANTES

A. M. NAVEIRA

Parmi les résultats qui relient les propriétés de la courbure d'une variété riemannienne avec la topologie de cette variété on peut signaler ceux de Chern [2] et Thorpe [7], [9] relatifs à l'annulation de certaines classes de Pontrjagin des variétés de Riemann à courbures sectionnelles d'un ordre fixe constant.

Les courbures sectionnelles holomorphes sont des invariants plus faibles que les courbures sectionnelles réelles. Si la courbure sectionnelle holomorphe d'ordre 2 est constante, on connaît une formule simple pour sa forme courbure [6] mais les courbures sectionnelles holomorphes d'ordre p ne semblent pas avoir été étudiées.

Dans la seconde section de cet article on résoud une conjecture indiquée par Gray [5] que nous nous étions posée avant de connaître le dit article. On donne une caractérisation de la forme courbure sectionnelle holomorphe d'ordre p constant en fonction de la forme courbure généralisée complexe et finalement, on déduit des propriétés sur les classes de Chern des variétés à courbure sectionnelle holomorphe d'ordre 2 constant.

Dans la première partie, en suivant une méthode différente de celle employée par Thorpe [7] on fait une exposition de certaines propriétés des courbures sectionnelles réelles, que nous utilisons dans § 2.

L'auteur veut exprimer sa reconnaissance aux Professeurs M. Berger, R. Deheuvels et A. Lichnerowicz pour leurs conseils et leur encouragement dans la réalisation de cet article.

1. Tous les objets géométriques seront de classe C^∞. M indiquera une variété riemannienne n-dimensionnelle, paracompacte et connexe; $F(M)$ le fibré $O(n)$-principal des répères orthonormaux sur M. Pour tout entier pair $p \leq n$, $G_p(M)$ indique la grassmannienne de p-vecteurs tangents.

Sur $F(M)$ existent les 1-formes θ^i, $1 \leq i, j \leq \cdots \leq n$ définies par $\theta^i(v) = g(\Pi_* v, f_i)$, où $v \in T_z F(M)$, $\Pi\colon F(M) \to M$, $z = (x, f_1, \cdots, f_n)$.

Pour chaque p-vecteur $P \in G_p(M)$, soit $K(P)$ sa courbure de Lipschitz-Killing. K est une fonction à valeurs réelles sur $G_p(M)$ que l'on définit comme

Communicated by A. Lichnerowicz, August 12, 1972. Cet article a été élaboré avec l'aide d'une bourse du plan de Formation de Rechercheurs du Ministère d'Education et Science, (Madrid), cours 1971–72.

la p-iéme courbure sectionnelle de M. En fonction de R, tenseur courbure de la variété, $K(P)$ s'exprime par:

$$K(P) = \frac{1}{2^{p/2}p!} \sum_{\alpha,\beta \in S_p} \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta) R(u_{\alpha(1)}, u_{\alpha(2)}, u_{\beta(1)} u_{\beta(2)}) \cdots \cdot R(u_{\alpha(p-1)}, u_{\alpha(p)}, u_{\beta(p-1)}, u_{\beta(p)}) ,$$

où $u_1, \cdots, u_p$ est une base orthonormale quelconque de P, S_p le groupe des permutations et $\varepsilon(\alpha)$ la signature de α.

Si $1 \leq i_1, \cdots, i_p \leq n$, on définit la forme courbure généralisée [7]:

$$\Psi_{i_1 \cdots i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{(j)} \delta(i, j) \Omega_{j_1 j_2} \wedge \cdots \wedge \Omega_{j_{p-1} j_p} ,$$

où $\Omega = (\Omega_{ij})$ est la forme courbure ordinaire.

Si R représente le tenseur courbure de M, pour chaque entier pair $p > 0$, on définit le p-iéme tenseur courbure R_p comme le champ tensoriel covariant d'ordre $2p$

$$R_p(u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_p) = \frac{1}{2^{p/2}p!} \sum_{\alpha,\beta \in S_p} \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta) \cdot R(u_{\alpha(1)}, u_{\alpha(2)}, v_{\beta(1)}, v_{\beta(2)}) \cdots R(u_{\alpha(p-1)}, u_{\alpha(p)}, v_{\beta(p-1)}, v_{\beta(p)}) \quad \forall\, u_i, v_j \in T(M) .$$

Proposition 1. *Si R_p et T_p sont deux tenseurs de courbure* [9] *tels que*

$$R_p(v_1, \cdots, v_p, v_1, \cdots, v_p) = T_p(v_1, \cdots, v_p, v_1, \cdots, v_p)$$

$\forall v_i \in T(M)$, alors $R_p = T_p$.

La démonstration résulte d'une méthode d'induction.

Corollaire 1. *Si R_p est le tenseur courbure généralisé, et*

$$K(P) = R_p(u_1, \cdots, u_p, u_1, \cdots, u_p) = constante\ c$$

pour tous les p-vecteurs engendrés par $u_1, \cdots, u_p$, orthonormaux, alors $R_p = cR'_p$.

En utilisant la seconde identité de Bianchi généralisée, on déduit

Proposition 2. *Si M est une variété de Riemann connexe de tenseur métrique g et tenseur de Ricci généralisé*

$$S(X_1, \cdots, X_s, Y_1, \cdots, Y_s) = \lambda \sum_{\gamma,\delta \in S_s} \varepsilon(\gamma)\varepsilon(\delta) g(X_{\gamma(1)}, Y_{\delta(1)}) \cdots g(X_{\gamma(s)}, Y_{\delta(s)}) ,$$

où λ est une fonction sur M, alors λ est nécessairement constante pour $n = \dim M > p = 2s$.

En utilisant une méthode classique, on prouve

Théorème 1. *Soit M une variété de Riemann connexe de dimension $n \geq p+1$, p pair. Si la courbure sectionnelle $K(P)$ d'ordre p est constante en chaque point, alors M est une variété à courbure sectionnelle d'ordre p constante.*

Corollaire 2. *Si M est une variété de Riemann avec p-iéme courbure sectionnelle constante K, alors le tenseur de courbure généralisé est donné par*

$$\begin{aligned} R_p(u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_p) &= \frac{1}{2^{p/2}p!} \sum_{\alpha,\beta \in S_p} \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta)K \\ &\cdot \{g(u_{\alpha(1)}, v_{\beta(1)})g(u_{\alpha(2)}, v_{\beta(2)}) - g(u_{\alpha(2)}, v_{\beta(1)})g(u_{\alpha(1)}, v_{\beta(2)})\} \cdots \\ &\cdot \{g(u_{\alpha(p-1)}, v_{\beta(p-1)})g(u_{\alpha(p)}, v_{\beta(p)}) - g(u_{\alpha(p)}, v_{\beta(p-1)})g(u_{\alpha(p-1)}, v_{\beta(p)})\} . \end{aligned}$$

Remarque 1. Le théorème 1 a été prouvé par Thorpe [7] en utilisant une méthode différente. En partant du corollaire 2, on peut obtenir de façon très facile en fonction de la forme courbure généralisée la caractérisation des courbures sectionnelles constantes [7].

2. Soit M une variété kählerienne de dimension complexe n. Dans la suite nous utilisons les notations de [6, Chapitre IX]. Ainsi ,on peut définir la forme courbure généralisée

$$\Psi^{i_1 \cdots i_s}_{j_1 \cdots j_s} = (-1)^{s(s-1)/2} \frac{2^s}{(2s)!} \sum_{\alpha,\beta \in S_s} \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta) \Psi^{\alpha(i_1)}_{\beta(j_1)} \wedge \cdots \wedge \Psi^{\alpha(i_s)}_{\beta(j_s)} ,$$

où $1 \leq i_k, j_l \leq n$, et $(\Psi^i_j) = (\Omega^i_j + i\Omega^i_{n+j})$ est la forme courbure complexe.

Considérons maintenant l'application $2p$-lineaire, $p = 2s$,

$$R_p : \underbrace{T(M) \times \cdots \times T(M)}_{2p} \to R$$

qui satisfait aux conditions:

i) alternée dans ses $2s$ premiers arguments,

ii) alternée dans ses $2s$ derniers arguments,

iii) invariante en changeant entre eux les $2s$ premiers arguments avec les $2s$ derniers,

iv) $$\begin{aligned} &R_p(JX_1, \cdots, JX_{2s}, X_{2s+1}, \cdots, X_{4s}) \\ &\quad = R_p(X_1, \cdots, X_{2s}, JX_{2s+1}, \cdots, JX_{4s}) = R_p(X_1, \cdots, X_{4s}) , \end{aligned}$$

v) Alt $R_p = 0$.

Remarque 2. En notation, nous représentons

$$X = (X_1, \cdots, X_\alpha) , \qquad JX = (JX_1, \cdots, JX_\alpha) .$$

Proposition 3. *Soient R_p et T_p deux applciations $4s$-lineaires qui satisfont aux propriétés* i)–v). *Alors $R_p = T_p$ si*

$$R_p(X, JX, X, JX) = T_p(X, JX, X, JX) .$$

On montre cette propriété en utilisant la méthode d'induction et la proposition 1.

Maintenant soit g un produit scalaire hermitien. Nous définissons:

$$R'_p(X_1, \cdots, X_p, Z_1, \cdots, Z_p) = \frac{1}{2^s(2s)!} \sum_{\alpha,\beta\in S_p} \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta)$$

$$\cdot\{g(X_{\alpha(1)}, Z_{\beta(1)})g(X_{\alpha(2)}, Z_{\beta(2)}) - g(X_{\alpha(1)}, Z_{\beta(2)})g(X_{\alpha(2)}, Z_{\beta(1)})$$
$$+ g(X_{\alpha(1)}, JZ_{\beta(1)})g(X_{\alpha(2)}, JZ_{\beta(2)}) - g(X_{\alpha(1)}, JZ_{\beta(2)})g(X_{\alpha(2)}, JZ_{\beta(1)})$$
$$+ 2g(X_{\alpha(1)}, JX_{\alpha(2)})g(Z_{\beta(1)}, JZ_{\beta(2)})\}\cdots$$
$$\cdot\{g(X_{\alpha(p-1)}, Z_{\beta(p-1)})g(X_{\alpha(p)}, Z_{\beta(p)}) - g(X_{\alpha(p-1)}, Z_{\beta(p)})g(X_{\alpha(p)}, Z_{\beta(p-1)})$$
$$+ g(X_{\alpha(p-1)}, JZ_{\beta(p-1)})g(X_{\alpha(p)}, JZ_{\beta(p)}) - g(X_{\alpha(p-1)}, JZ_{\beta(p)})g(X_{\alpha(p)}, JZ_{\beta(p-1)})$$
$$+ 2g(X_{\alpha(p-1)}, JX_{\alpha(p)})g(Z_{\beta(p-1)}, JZ_{\beta(p)})\} .$$

Evidemment, R'_p vérifie les propriétés i)–v).

Comme on sait, la courbure sectionnelle holmorphe d'ordre $2s$ d'une variété kählerienne M du $2s$-vecteur holomorphe P determiné par $(X_1, \cdots, X_s, JX_1, \cdots, JX_s)$ est donnée par

$$K(P) = R_p(X_1, \cdots, X_s, JX_1, \cdots, JX_s, X_1, \cdots, X_s, JX_1, \cdots, JX_s) ,$$

où $X_i \in T(M)$ font partie d'une base orthonormale.

En conséquence de la proposition 2 on a le

Corollaire 3. *Soit R_p une application $4s$-linéaire qui vérifie* i)–v). *Si $K(P)$ = constante c, pour tous les $2s$-vecteurs P, invariants par J, alors $R_p = cR'_p$.*

Evidemment, si M est une variété kählerienne, dans un système de coordonnées complexes $(z^\alpha, \bar{z}^\alpha)$ avec $Z_\alpha = \partial/\partial z^\alpha$ et $Z_{\bar\alpha} = \partial/\partial \bar{z}^\alpha$ orthonormaux, on peut écrire le tenseur de Ricci généralisé:

$$S(X_{\bar 1}, \cdots, X_{\bar s}, Y_1, \cdots, Y_s)$$
$$= \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_s = 1}^{n} R_p(Z_{\alpha_1}, \cdots, Z_{\alpha_s}, X_{\bar 1}, \cdots, X_{\bar s}, Z_{\bar\alpha_1}, \cdots, Z_{\bar\alpha_s}, Y_1, \cdots, Y_s) .$$

Théorème 2. *Soit M une variété kählerienne connexe de dimension complexe $n \geq p = 2s$. Si la courbure sectionnelle holomorphe K d'ordre p dépend seulement de $x \in M$, alors M est une variété kählerienne de courbure sectionnelle holomorphe d'ordre p constante.*

Démonstration. Puisque $R_p = KR'_p$, K fonction sur M, par la proposition 2 il suffit de prouver que

$$S(X_{\bar 1}, \cdots, X_{\bar s}, Y_1, \cdots, Y_s)$$
$$= cK \sum_{\gamma,\delta\in S_s} \varepsilon(\gamma)\varepsilon(\delta) g(X_{\overline{\gamma(1)}}, Y_{\delta(1)}) \cdots g(X_{\overline{\gamma(s)}}, Y_{\delta(s)}) ,$$

ou c est une constante déterminée.

Mais en utilisant les propriétés du tenseur courbure complexe $R_p(X_1, \cdots, X_s, Y_{\bar{1}}, \cdots, Y_{\bar{s}}, Z_1 \cdots, Z_s, W_{\bar{1}}, \cdots, W_{\bar{s}})$ on a

$$
\begin{aligned}
& S(X_{\bar{1}}, \cdots, X_{\bar{s}}, Y_1, \cdots, Y_s) \\
&\quad = Kc_1 \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_s = 1}^{n} R'_p(Z_{\alpha_1}, \cdots, Z_{\alpha_s}, X_{\bar{1}}, \cdots, X_{\bar{s}}, Z_{\bar{\alpha}_1}, \cdots, Z_{\bar{\alpha}_s}, Y_1, \cdots, Y_s) \\
&\quad = Kc_2 \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_s = 1}^{n} \sum_{a,b,c,d \in S_s} \varepsilon(a)\varepsilon(b)\varepsilon(c)\varepsilon(d) \\
&\qquad \cdot \prod_{\beta=1}^{s} \{g(Z_{a(\alpha_\beta)}, Z_{\overline{c(\alpha_\beta)}}) g(X_{\overline{b(\beta)}}, Y_{d(\beta)}) + g(Z_{a(\alpha_\beta)}, X_{\overline{b(\beta)}}) g(Z_{\overline{c(\alpha_\beta)}}, Y_{d(\beta)})\} \\
&\quad = Kc_3 \sum \sum \varepsilon \prod_{\beta=1}^{s} \{\delta^{a(\alpha_\beta)}_{\overline{c(\alpha_\beta)}} g(X_{\overline{b(\beta)}}, Y_{d(\beta)}) + g(Z_{a(\alpha_\beta)}, X_{\overline{b(\beta)}}) g(Z_{\overline{c(\alpha_\beta)}}, Y_{d(\beta)})\} ,
\end{aligned}
$$

ou c_i sont des constantes déterminées. Finalement, on montre aisement que $g(Z_{a(\alpha_\beta)}, X_{\overline{b(\beta)}}) g(Z_{\overline{c(\alpha_\beta)}}, Y_{d(\beta)})$ est un multiple de $g(X_{\overline{b(\beta)}}, Y_{d(\beta)})$.

Proposition 4. *Le tenseur de courbure généralisé d'une variété kählerienne a p-iéme courbure sectionnelle holomorphe constante K peut s'écrire*:

$$
\begin{aligned}
& R_p(X_{i_1}, \cdots, X_{i_s}, X_{\bar{j}_1}, \cdots, X_{\bar{j}_s}, X_{k_1}, \cdots, X_{k_s}, X_{\bar{l}_1}, \cdots, X_{\bar{l}_s}) \\
&= Kc(-1)^s \sum_{a,b,c,d \in S_s} \varepsilon(a)\varepsilon(b)\varepsilon(c)\varepsilon(d) \\
&\quad \cdot \prod_{\beta=1}^{s} \{g(X_{a(i_\beta)}, X_{\overline{d(l_\beta)}}) g(X_{\overline{b(j_\beta)}}, X_{c(k_\beta)}) + g(X_{a(i_\beta)}, X_{\overline{b(j_\beta)}}) g(X_{c(k_\beta)}, X_{\overline{d(l_\beta)}})\} .
\end{aligned}
$$

La proposition suivante caractérise les courbures sectionnelles holomorphes constantes et correspond dans le cas complexe au théorème 5.1 de Thorpe [7].

Proposition 5. *Si M est une variété kählerienne à p-iéme courbure sectionnelle holomorphe constante K, alors la forme courbure généralisée est donnée par*

$$
\begin{aligned}
\Psi^{i_1 \cdots i_s}_{j_1 \cdots j_s} = \frac{s!}{(2s)!} K\{ & s!\, \phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi^{i_s} \wedge \bar{\phi}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\phi}^{j_s} \\
& + (s-1)! \sum_k \delta^{i_k}_{j_k} \sum_{\lambda_k} \phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi^{i_{k-1}} \wedge \phi^{\lambda_k} \\
& \wedge \phi^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \phi^{i_s} \wedge \bar{\phi}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\phi}^{j_{k-1}} \\
& \wedge \bar{\phi}^{\lambda_k} \wedge \bar{\phi}^{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \bar{\phi}^{j_s} + \cdots \\
& + \delta^{i_1}_{j_1} \cdots \delta^{i_s}_{j_s} \sum_{\lambda_1 \cdots \lambda_s} \phi^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge \phi^{\lambda_s} \wedge \bar{\phi}^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\phi}^{\lambda_s}\} .
\end{aligned}
$$

Démonstration. Puisque

$$
\Psi^{j_1 \cdots j_s}_{i_1 \cdots i_s} = R_{\bar{j}_1 \cdots \bar{j}_s i_1 \cdots i_s k_1 \cdots k_s \bar{l}_1 \cdots \bar{l}_s} \phi^{k_1} \wedge \cdots \wedge \phi^{k_s} \wedge \bar{\phi}^{l_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\phi}^{l_s} ,
$$

il suffit de choisir le repère $(Z_1, \cdots, Z_s, \bar{Z}_1, \cdots, \bar{Z}_s)$ orthonormal et d'appliquer la proposition 4.

Théorème 3. *Si M est une variété kählerienne à courbure sectionnelle holomorphe constante K, alors les classes de Chern $C_i(M)$ sont engendrées par $C_1(M)$.*

Démonstration. Puisque

$$C_1(M) = \{Tr\, \Psi\} = \tfrac{1}{2} K(n+1)\{\sum_{\lambda} \phi^{\lambda} \wedge \bar{\phi}^{\lambda}\}$$

de l'expresion particulière de la forme courbure, on déduit (Prop. 5)

$$C_2(M) = \{Tr(\Psi \wedge \Psi)\} = C_1(M) \cdot C_1(M) .$$

Supposons maintenant que

$$C_s(M) = (n+1)^{1-s}\{C_1(M)\}^s ,$$

du fait que

$$\underbrace{\Psi \wedge \cdots \wedge \Psi}_{s+1} = (\underbrace{\Psi \wedge \cdots \wedge \Psi}_{s}) \wedge \Psi .$$

Prenant la trace, on déduit

$$C_{s+1}(M) = (n+1)^{-s}\{C_1(M)\}^{s+1} .$$

Remarque 3. Le résultat du théorème 3 est évident dans le cas positif ou nul, car il est classique alors qu'il s'agit ou de variétés plats ou du projectif complexe.

Bibliographie

[1] R. L. Bishop & S. Goldberg, *Some implications of the generalized Gauss-Bonnet theorem,* Trans. Amer. Math. Soc. **112** (1964) 508–535.

[2] S. S. Chern, *On curvature and characteristic classes of a Riemannian manifold,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **20** (1955) 117–126.

[3] S. Goldberg, *Curvature and homology,* Academic Press, New York, 1962.

[4] S. Goldberg & S. Kobayashi, *Holomorphic bisectional curvature,* J. Differential Geometry **1** (1967) 225–233.

[5] A. Gray, *A generalization of F. Schur's theorem,* J. Math. Soc. Japan **3** (1969) 454–457.

[6] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of differential geometry,* Vols. I, II, Interscience, New York, 1963, 1969.

[7] J. A. Thorpe, *Sectional curvatures and characteristic classes,* Ann. of Math. **80** (1964) 429–443.

[8] ——, *On the curvatures of Riemannian manifolds,* Illinois J. Math. **10** (1966) 412–417.

[9] ——, *Some remarks on the Gauss-Bonnet integral,* J. Math. Mech. **18** (1969) 779–786.

Université de Santiago de Compostela, Espagne